二元配置実験に於てセルに於ける繰返し数が等しくない場合の解析について (実験計画法研究会報告集)

数理解析研究所講究録
25巻 1967年 221-239

二元配置実験に於て，セルに於ける繰返し数が等しくない場合の解析について

東大 工 広津千尋

§0. 要約

二元配置実験で，セルでの繰返し数が等しくない場合に，構造が母数模型であれば最小二乗法によって推定，検定ができるが一般に式が複雑になる。もし変量模型であれば，完備十分統計量が得られないので最良不偏推定量や一様最強力検定は得られない。前に，空のセルが無い場合にセルミーンから作った簡単な統計量による分散成分の推定を論じ，繰返し数の不揃いが甚だしくない場合には比較的よい性質を持つことを示した[1]。

ここでは母数模型を仮定し，セルミーンから作った統計量による近似検定を論ずる。

§1. 正規確率変数の二次形式および二次形式の比の分布

§2. に於てセルミーンから作った検定統計量の分布が必要になるので今節でその準備をしておく。

確率変数，

$$x = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)'$$

が多次元正規分布

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} x' \Sigma^{-1} x\right\}$$

に従っているとする。この時二次形式，

(1) $\quad S = x' A x$

の分布を考える。ただし，A は $n \times n$ の *real symmetric matrix*.

S の特性函数 $\psi(t)$ は

$$\psi(t) = |I_n - 2it B|^{-\frac{1}{2}} \qquad (B = A\Sigma)\text{, } I_n\text{:単位行列}$$

である。この特性函数を *convergent series* に展開することを考える。

$$B = I_n + B^*$$

とする。すると，

$$\psi(t) = |(1-2it) I_n - 2it B^*|^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (1-2it)^{-\frac{n}{2}} \left\{1 + \sum_{k=1}^{n_0} f_k (1-2it)^{-k} (-2it)^k\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

ただし，

(2)
$$\begin{cases} f_k = \displaystyle\sum\sum\cdots\sum_{1\le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n} \begin{vmatrix} b^*_{i_1 i_1} & \cdots & b^*_{i_1 i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b^*_{i_k i_1} & \cdots & b^*_{i_k i_k} \end{vmatrix} & (k = 1, 2, \cdots, n_0) \\ n_0 = \text{rank } B^* \\ b^*_{ij} : (i, j) \text{ element of } B^*. \end{cases}$$

つぎに，

$$\left|\sum_{k=1}^{n_0} f_k (1-2it)^{-k}(-2it)^k\right| < 1$$

として $\psi(t)$ を二項展開する。この条件は，

$$\sum_{k=1}^{n_0} |f_k| < 1$$

ならみたされる。

$$\psi(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}}\left\{1-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_0} f_k (1-2it)^{-k}(-2it)^k + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{(\frac{1}{2}-r)!}{r!}\left(\sum_{k=1}^{n_0} f_k (1-2it)^{-k}(-2it)^k\right)^r + \cdots\right\}$$

これは t の全域で一様収束するから，逆変換を行う時に項別積分してよい。

$$\left\{\sum_{k=1}^{n_0} f_k (1-2it)^{-k}(-2it)^k\right\}^r$$
$$= \sum_{k_1=1}^{n_0}\cdots\sum_{k_r=1}^{n_0}\left(\prod_{i=1}^{r} f_{k_i}\right)(1-2it)^{-\sum_{i=1}^{r}k_i}(-2it)^{\sum_{i=1}^{r}k_i}$$
$$= \sum_{k_1=1}^{n_0}\cdots\sum_{k_r=1}^{n_0}\left(\prod_{i=1}^{r} f_{k_i}\right)\sum_{p=0}^{(\sum_{i=1}^{r}k_i)}\binom{\sum_{i=1}^{r}k_i}{p}(-1)^p(1-2it)^{-p}$$

であり，$(1-2it)^{-p}$ は自由度 $2p$ の χ^2 分布の特性函数であるから $\psi(t)$ の逆変換は容易に得られ，S の確率密度函数 $p(S)$ は次の様になる。

補助定理 1　(1) 式の S の確率密度函数 $p(S)$ は

$$p(S) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}-r)!}{r!}\sum_{k_1=1}^{n_0}\cdots\sum_{k_r=1}^{n_0}\left(\prod_{i=1}^{r} f_{k_i}\right)\sum_{p=0}^{\sum_{i=1}^{r}k_i}\binom{\sum_{i=1}^{r}k_i}{p}(-1)^p k(\chi^2; n+2p)$$

特に第0項は

$$h(\chi^2\ ;\ n)$$

である。ただし，$h(\chi^2\ ;\ n)$ は自由度 n の χ^2 分布の確率密度函数であり，

$$\left(\frac{1}{2}-r\right)! = \left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{2}-r\right) \qquad (r \geqq 1)$$

である。式中の f_k の値は (2) 式から計算され，その具体的な形は補助定理3で与えられる。

この展開を見ると元の分布が χ^2 分布に近い時は f_k ($k=1, 2, \cdots, n_0$) の値が小さく収束が速い。また，展開の第 r 項まで取ると第 r 次のモーメントまでは正確な分布と一致している。

つぎに二次形式と独立な χ^2 分布との比の分布を求める。

$$S_0 = x' A x$$

S_1 ＝自由度 m の χ^2 分布をする統計量，S_0 とは独立とする。

この時，

(3) $$W = S_0 / S_1 \qquad (S_0 \perp\!\!\!\perp S_1)$$

の分布を考える。

S_0，S_1 の同時分布の特性函数は

$$\psi(t_0, t_1) = |I_n - 2it_0 B|^{-\frac{1}{2}} (1-2it_1)^{-\frac{m}{2}}$$

である。これから [2] によって W の分布を導く。

まず，

$$\left.\frac{\partial \Psi(t,\, u-wt)}{\partial u}\right|_{u=0} = \left|I_n - 2itB\right|^{-\frac{1}{2}} (mi)(1+2iwt)^{-\frac{m}{2}-1}\text{。}$$

この式においても前と同様の展開を行うことより r 項は

$$\sum_{k_1=1}^{n_0} \cdots \sum_{k_r=1}^{n_0} \left(\prod_{i=1}^{r} f_{k_i}\right) \sum_{p=0}^{\sum_1^r k_i} \binom{\sum_1^r k_i}{p} (-1)^p (1-2it)^{-\frac{n+2p}{2}} (mi)(1+2iwt)^{-\frac{m}{2}-1}$$

となる。これより w の密度函数 $p(w)$ は次の様になる。

補助定理 2　(3) 式の w の密度函数 $p(w)$ は

$$p(w) = \frac{1}{2\pi i}\int \left[\frac{\partial \Psi(t,\, u-wt)}{\partial u}\right]_{u=0} dt$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-r)!}{r!} \sum_{k_1=1}^{n_0} \cdots \sum_{k_r=1}^{n_0} \left(\prod_{i=1}^{r} f_{k_i}\right) \sum_{p=0}^{\sum_1^r k_i} \binom{\sum_1^r k_i}{p} (-1)^p h(\xi;\, n+2p,\, m)$$

特に第0項は

$$h(\xi;\, n,\, m)$$

である。ただし，$h(\xi;\, n, m)$ は自由度 n，m の2つの独立な χ^2 分布の比，$\xi = \chi^2(n) / \chi^2(m)$ の確率密度函数である。

つぎに，(2) 式中の f_k の計算を示す。

$$f_k = \frac{1}{k!}\sum_{i_1}^{n} \cdots \sum_{i_k}^{n} \begin{vmatrix} b^*_{i_1 i_1} & \cdots & b^*_{i_1 i_k} \\ & \cdots\cdots & \\ b^*_{i_k i_1} & \cdots & b^*_{i_k i_k} \end{vmatrix} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n_0)$$

であることは容易にわかる。

いま，$b^*_{i_1 i_2} \cdot b^*_{i_2 i_3} \cdot \cdots \cdot b^*_{i_k i_1}$ というタイプの積を長さ k の chain

と呼ぶことにすれば，長さkの chain は添字全部について 1 から n まで加えると $\mathrm{tr}\, B^{*k}$ となる。そこで

$$\begin{vmatrix} b^*_{i_1 i_1} & \cdots & b^*_{i_1 i_k} \\ & \cdots\cdots & \\ b^*_{i_k i_1} & \cdots & b^*_{i_k i_k} \end{vmatrix}$$

とあらわれる $k!$ 個の和を，長さ $k-m$ の chain と，残り m 個の任意の積から $k-m$ より長い chain を除いたものとの積で書かれるもので類別し，$m=0$ から $k-1$ まで加えるという方法を取ると次の補助定理 3 を得る。

補助定理 3　(2)式中の f_k は次の様に計算される。

$$f_k = \frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k-1}\binom{k}{m} m!\, g_m(k-m)\cdot(-1)^{k-m-1}(k-m-1)!\,\mathrm{tr}\, B^{*\,k-m}$$

ただし，$g_m(x)$ は f_m から x より長い chain は全て除き，$\{\mathrm{tr}\, B^{*x}\}^{\alpha}$ という項を含む項がもし有れば $1/(\alpha+1)$ 倍したもの。

証明　長さ $k-m$ の chain は $(k-m)\times(k-m)$ の小行列式の中で $(k-m-1)!$ 通り作られ，その符号は $(-1)^{k-m-1}$ である。そして，その様な小行列式の作り方は $\binom{k}{k-m}$ 通り有る。これに残りの $m\times m$ の小行列式の中で長さ $k-m$ 以下の chain を持つ項をかければ，最大長の chain の長さが $k-m$ であるものが全て得られる。その際に，$\{\mathrm{tr}\, B^{*\,k-m}\}^{\alpha+1}$ を含む項は $\mathrm{tr}\, B^{*\,k-m}$ を最初に取り出す時に $\binom{k}{k-m}$ 通り有るとしているが，実は，$\alpha+1$ 個の小行列式があって，$\{\mathrm{tr}\, B^{*\,k-m}\}^{\alpha+1}$ を与えるのに $\alpha+1$ 回重複して数えている。証終。

若干の t_k の計算を次に示す。

$$t_0 = 1 \quad (\text{定義})$$

$$t_2 = \frac{1}{2!}\left\{-\mathrm{tr}\,B^{*2} + (\mathrm{tr}\,B^{*})^2\right\}$$

$$t_3 = \frac{1}{3!}\left\{2!\,\mathrm{tr}\,B^{*3} - 3\,\mathrm{tr}\,B^{*2}\,\mathrm{tr}\,B^{*} + (\mathrm{tr}\,B^{*})^3\right\}$$

$$t_4 = \frac{1}{4!}\left\{-3!\,\mathrm{tr}\,B^{*4} + 8\,\mathrm{tr}\,B^{*3}\cdot\mathrm{tr}\,B^{*} + 3(\mathrm{tr}\,B^{*2})^2 - 6\,\mathrm{tr}\,B^{*2}(\mathrm{tr}\,B^{*})^2 + (\mathrm{tr}\,B^{*})^4\right\}$$

, etc.

ここで従来の様に，はじめに二次形式を直交変換し固有根によって議論することをしなかったのは次の２つの理由による。

(i) ~~第3節~~ §2. でセルミーンから作った検定統計量の性質を論ずる場合に (i, j) セルでの繰返し数 n_{ij} の影響を n_{ij} の関数として把握したい。

(ii) 変量模型で同様の議論をする場合に独立でない二次形式の比の分布が必要になる。そこでも今節と類似の議論を展開するが，固有根によって特性関数を展開することはできなくなる。(ただし，この変量模型については機会を改めて述べて見たい。)

§2. 母数模型の場合の近似検定 —— 帰無仮説の下での性質

モデル

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$\varepsilon_{ijk} : NID(0, \sigma_e^2)$$

ただし, $i=1,2,\cdots,a$; $j=1,2,\cdots,b$; $k=1,2,\cdots,n_{ij}$; n_{ij} : (i,j) セルでの繰返し数で 1 以上とする。

つぎに, z_{ij} はセルミーンとする。すなわち,

$$z_{ij} = \frac{1}{n_{ij}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}$$

$$= \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \frac{1}{n_{ij}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} \varepsilon_{ijk} .$$

z_{ij} を次の様に並べた縦ベクトルを $\mathbb{Z}$ とおく。

$$\mathbb{Z} = (z_{11}, z_{12}, \cdots, z_{1b}, z_{21}, \cdots, z_{2b}, \cdots\cdots, z_{a1}, \cdots, z_{ab})'$$

すると

$$Var(\mathbb{Z}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_{11}} & & & & \\ & \ddots & & \mathbb{O} & \\ & & \frac{1}{n_{1b}} & & \\ & & & \ddots & \\ & \mathbb{O} & & \frac{1}{n_{a1}} & \\ & & & & \ddots \; \frac{1}{n_{ab}} \end{bmatrix} \sigma_e^2 .$$

つぎに4つの統計量を定義する。

$$S_\alpha = \sum_i^a \sum_j^b (\bar{z}_{i.} - \bar{\bar{z}}_{..})^2 / (a-1) = \mathbb{Z}' Q_\alpha \mathbb{Z}$$

$$S_\beta = \sum_i^a \sum_j^b (\bar{z}_{.j} - \bar{\bar{z}}_{..})^2 / (b-1) = \mathbb{Z}' Q_\beta \mathbb{Z}$$

$$S_{\alpha\beta} = \sum_i^a \sum_j^b (z_{ij} - \bar{z}_{i.} - \bar{z}_{.j} + \bar{\bar{z}}_{..})^2 / (a-1)(b-1) = \mathbb{Z}' Q_{\alpha\beta} \mathbb{Z}$$

$$S_e = \sum_i^a \sum_j^b \sum_k^{n_{ij}} (y_{ijk} - z_{ij})^2 / (N-ab)$$

ただし,

$$\bar{z}_{i\cdot} = \sum_{j}^{b} z_{ij}/b\ ,\quad \bar{z}_{\cdot j} = \sum_{i}^{a} z_{ij}/a\ ,\quad \bar{\bar{z}}_{\cdot\cdot} = \sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}/ab\ ;$$

$$N = \sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b} n_{ij}\ .$$

また，各式の最後の項は matrix 表示であり，G_α，G_β，$G_{\alpha\beta}$ は次の通りである。

$$G_\alpha = \{P \setminus Q\}_a\ ,\quad P = \frac{1}{ab} J_{b\cdot b}\ ,\quad Q = -\frac{1}{ab(a-1)} J_{b\cdot b}$$

$$G_\beta = \{R \setminus R\}_a\ ,\quad R = \frac{1}{a(b-1)}\left[I_b - \frac{1}{b} J_{b\cdot b}\right]$$

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{(a-1)(b-1)}\left[I_{ab} - \frac{1}{ab} J_{ab\cdot ab} - (a-1)G_\alpha - (b-1)G_\beta\right]$$

ただし，I_b は order b の単位行列，$J_{b\cdot b}$ は要素が全て 1 である $b\times b$ 行列，$\{P \setminus Q\}_a$ は対角上が全て P，非対角要素が全て Q である $a\times a$ 行列（P，Q は行列でもよい）。

この 4 つの統計量だけを用いて，通常行われている帰無仮説の検定を考える。

i）交互作用（$\alpha\beta$）について

帰無仮説は

$$H_{\alpha\beta} : E(y_{ijk}) = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

である。

検定統計量を

$$W_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}\Big/\left\{\left(\frac{1}{ab}\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b} n_{ij}^{-1}\right) S_e\right\}$$

とし，棄却限界を通常のF分布の5%点，すなわち

$$\text{棄却域}:\quad W'_{\alpha\beta} > F((a-1)(b-1),\ N-ab;\ 0.05)$$

とする。この時第一種の過誤の確率が公称値 0.05 からどの位ずれるかというのが問題である。この場合のその確率を $P_{\alpha\beta}$ とおく。

$$P_{\alpha\beta} = P_r\{W'_{\alpha\beta} > F((a-1)(b-1),\ N-ab;\ 0.05) \mid H_{\alpha\beta}\}$$

$$= P_r\left\{W_{\alpha\beta} > \frac{(a-1)(b-1)}{N-ab} F((a-1)(b-1),\ N-ab;\ 0.05) \,\middle|\, H_{\alpha\beta}\right\}$$

ただし，

$$(4)\qquad W_{\alpha\beta} = \frac{(a-1)(b-1)S_{\alpha\beta}}{\mathrm{tr}\{V(\mathbb{Z})\cdot Q_{\alpha\beta}\}} \bigg/ \frac{(N-ab)S_e}{\sigma_e^2}.$$

この $P_{\alpha\beta}$ を計算するために，$W_{\alpha\beta}$ の分布を導く。

帰無仮説の下では，$W_{\alpha\beta}$ の分子と分母の統計量の同時分布の特性関数は

$$\psi(t_{\alpha\beta}, t_e) = \left| I_{ab} - 2it_{\alpha\beta}\frac{(a-1)(b-1)}{\mathrm{tr}\{V(\mathbb{Z})\cdot Q_{\alpha\beta}\}} V(\mathbb{Z})\cdot Q_{\alpha\beta}\right|^{-\frac{1}{2}} (1-2it_e)^{-\frac{N-ab}{2}}$$

である。ここで $V(\mathbb{Z})$ を2つの部分 V_0, V_1 にわける。

$$(5)\qquad V(\mathbb{Z}) = V_0 + V_1 = \frac{\sigma_e^2}{n} I_{ab} + \begin{bmatrix} \frac{1}{n_{11}} - \frac{1}{n} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{n_{1b}} - \frac{1}{n} & & \\ & & & \frac{1}{n_{a1}} - \frac{1}{n} & \\ 0 & & & \ddots & \frac{1}{n_{ab}} - \frac{1}{n} \end{bmatrix} \sigma_e^2$$

ただし，

$$n = \left(\frac{1}{ab}\sum_i^a \sum_j^b n_{ij}^{-1}\right)^{-1}。$$

$$\mathrm{tr}(V_1\cdot\Psi_{\alpha\beta}) = 0$$

$$\mathrm{tr}(V_2\cdot\Psi_{\alpha\beta}) = \mathrm{tr}(V(2)\cdot\Psi_{\alpha\beta}) = n^{-1}\cdot\sigma_e^2$$

であるから

$$\psi(t_{\alpha\beta}, t_e) = \left| I_{ab} - 2it_{\alpha\beta}\,(a-1)(b-1)\,\Psi_{\alpha\beta} - 2it_{\alpha\beta}\frac{n(a-1)(b-1)}{\sigma_e^2}\,V_1\cdot\Psi_{\alpha\beta}\right|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times\,(1-2it_e)^{-\frac{N-ab}{2}}$$

となる。

この行列式の計算のために次の様な直交変換を考える。

(6)
$$O' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdots \frac{1}{\sqrt{ab}} & \cdots\cdots & \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdots \frac{1}{\sqrt{ab}} \\ \frac{\delta_{21}}{\sqrt{b}} \cdots \frac{\delta_{21}}{\sqrt{b}} & \cdots\cdots & \frac{\delta_{2a}}{\sqrt{b}} \cdots \frac{\delta_{2a}}{\sqrt{b}} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \frac{\delta_{a1}}{\sqrt{b}} \cdots \frac{\delta_{a1}}{\sqrt{b}} & \cdots\cdots & \frac{\delta_{aa}}{\sqrt{b}} \cdots \frac{\delta_{aa}}{\sqrt{b}} \\ \frac{\eta_{21}}{\sqrt{a}} \cdots \frac{\eta_{2b}}{\sqrt{a}} & \cdots\cdots & \frac{\eta_{21}}{\sqrt{a}} \cdots \frac{\eta_{2b}}{\sqrt{a}} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \frac{\eta_{b1}}{\sqrt{a}} \cdots \frac{\eta_{bb}}{\sqrt{a}} & \cdots\cdots & \frac{\eta_{b1}}{\sqrt{a}} \cdots \frac{\eta_{bb}}{\sqrt{a}} \\ & \delta' \otimes \eta' & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O'_\mu \\ \\ O'_\alpha \\ \\ O'_\beta \\ \\ O'_{\alpha\beta} \end{bmatrix},$$

ただし,

$$\delta' = \begin{bmatrix} \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2a} \\ & \cdots\cdots & & \\ \delta_{a1} & \delta_{a2} & \cdots & \delta_{aa} \end{bmatrix}, \quad \eta' = \begin{bmatrix} \eta_{21} & \eta_{22} & \cdots & \eta_{2b} \\ & \cdots\cdots & & \\ \eta_{b1} & \eta_{b2} & \cdots & \eta_{bb} \end{bmatrix}$$ であり,

$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} J_{1\cdot a} \\ \delta' \end{bmatrix}$ および $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{b}} J_{1\cdot b} \\ \eta' \end{bmatrix}$ は直交行列, $\otimes$ は Kronecker 積をあらわす。この直交変換によって,

$$\psi(t_{\alpha\beta}, t_e) = \left| (1-2it_{\alpha\beta}) I_{(a-1)(b-1)} - 2it_{\alpha\beta}\, n O'_{\alpha\beta} \mathfrak{N} O_{\alpha\beta} \right.$$

$$\times (1-2it_e)^{-\frac{N-ab}{2}}$$

を得る。ただし、

$$(7) \qquad \mathfrak{N} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_{11}} - \frac{1}{n} & & & \\ & \frac{1}{n_{1b}} - \frac{1}{n} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{n_{ab}} - \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

である。これは補助定理2に於て $B^* = n O'_{\alpha\beta} \mathfrak{N} O_{\alpha\beta}$ とした場合

たっているから求める $P_{\alpha\beta}$ は

$$P_{\alpha\beta} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-r)!}{r!} \sum_{k_1=1}^{(a-1)(b-1)} \cdots \sum_{k_r=1}^{(a-1)(b-1)} f_{k_1} \times \cdots \times f_{k_r} \sum_{p=0}^{\sum_1^r k_i} \binom{\sum_1^p k_i}{p} (-1)^p$$

$$\times \int_{\frac{(a-1)(b-1)}{N-ab} F\{(a-1)(b-1),\, N-ab;\, 0.05\}}^{\infty} h(G;\, (a-1)(b-1)+2p,\, N-ab)\, dG$$

となる。f_k の値は補助定理3から計算される。数値例は主効果 α の検定の場合と一緒に後記する。

(ii) 主効果 α について

交互作用に関する仮説が採択された場合には、主効果 α についての

を考える。この場合の基本仮定と仮説は

基本仮定 : $E(x_{ijk}) = \mu + \alpha_i + \beta_j$

仮説(H_α) : $E(x_{ijk}) = \mu \qquad + \beta_j$

である。検定統計量を

$$W'_\alpha = S_\alpha \Big/ \frac{1}{n} S_e$$

とし，棄却限界は，

棄却域：　$W_\alpha' > F(a-1,\ N-ab\ ;\ 0.05)$

とする。この場合，$S_{\alpha\beta}$ の情報を使わないのは $S_{\alpha\beta}$ が S_α と独立でないために近似が悪くなるので，多元配置であれば無理にそうしなくても，S_e の自由度は十分大きいことが期待されるからである。

交互作用の場合と同様に，第一種の過誤の確率 P_α を計算する。

$$P_\alpha = P_r\left\{\ W_\alpha' > F(a-1,\ N-ab\ ;\ 0.05)\ \middle|\ H_\alpha\right\}$$

$$= P_r\left\{\ W_\alpha > \frac{a-1}{N-ab}F(a-1,\ N-ab\ ;\ 0.05)\ \middle|\ H_\alpha\right\}$$

ただし，

$$W_\alpha = \frac{(a-1)S_\alpha}{tr(V(\mathbb{Z})\cdot G_\alpha)} \bigg/ \frac{(N-ab)S_e}{\sigma_e^2}$$

つぎに，W_α の分布を導びく。帰無仮説の下では，W_α の分母と分子の統計量の同時分布の特性函数は次の通りである。

$$\psi(t_\alpha,\ t_e) = \left|I_{ab} - 2it_\alpha\frac{a-1}{tr(V(\mathbb{Z})\cdot G_\alpha)}V(\mathbb{Z})\cdot G_\alpha\right|^{-\frac{1}{2}}(1-2it_e)^{-\frac{N-ab}{2}}$$

以下，交互作用の場合と全く同様に，（５）式の様に $V(\mathbb{Z})$ を分解し（６）式の様な直交変換を施こすと

$$\psi(t_\alpha, t_e) = \left|(1-2it_\alpha)I_{a-1} - 2it_\alpha\, n\, O_\alpha'\, \mathcal{M}\, O_\alpha\right|^{-\frac{1}{2}}(1-2it_e)^{-\frac{N-ab}{2}}$$

となる。これより，補助定理２を用いて

$$P_\alpha = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}-r)!}{r!}\sum_{k_1=1}^{a-1}\cdots\sum_{k_r=1}^{a-1}\left(\prod_{i=1}^{r}f_{k_i}\right)\sum_{p=0}^{\sum k_i}\binom{\sum k_i}{p}(-1)^p \qquad \times$$

$$\times \int_{\frac{a-1}{N-ab}F(a-1,\ N-ab\ :\ 0.05)}^{\infty} h(q\ ;\ a-1+2p,\ N-ab)\,dq$$

を得る。f_k の値は，補助定理 3 に於て $B^* = n O_\alpha' \mathcal{M} O_\alpha$ として求められるが，若干の f_k の値は次の様に簡単にあらわせる。

$$f_0 = 1 \quad (\text{定義})$$

$$f_1 = 0 \qquad (\because \ \mathrm{tr}\,\mathcal{M} = 0)$$

$$f_2 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{a-2}{a}\sum_{i=1}^{a}\left\{\frac{n}{b}\sum_{j=1}^{b}\left(\frac{1}{n_{ij}}-\frac{1}{n}\right)\right\}^2 \tag{8}$$

$$f_3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{a-3}{a}\sum_{i=1}^{a}\left\{\frac{n}{b}\sum_{j=1}^{b}\left(\frac{1}{n_{ij}}-\frac{1}{n}\right)\right\}^3$$

$$f_4 = -\frac{1}{4}\cdot\frac{a-4}{a}\left[\sum_{i=1}^{a}\left\{\frac{n}{b}\sum_{j=1}^{b}\left(\frac{1}{n_{ij}}-\frac{1}{n}\right)\right\}^4 - \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{a}\left(\frac{n}{b}\sum_{j=1}^{b}\left(\frac{1}{n_{ij}}-\frac{1}{n}\right)\right)^2\right\}^2\right]$$

etc.

n_{ij} のばらつきはこの $f_k\ (k=1, 2, \cdots, a-1)$ を通してのみ影響すること，また，$\sum_j n_{ij}^{-1}$ が i によらない定数である時には，α に関する検定は正確なものになっていることもわかる。

(iii) 主効果 β について

主効果 α についての議論と全く同様にして次の結果を得る。

$$P_\beta = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}-r)!}{r!}\sum_{k_1=1}^{b-1}\cdots\sum_{k_r=1}^{b-1}\left(\prod_1^r f_{k_i}\right)\sum_{p=0}^{\sum^r k_i}\binom{\sum^r k_i}{p}(-1)^p$$

$$\times \int_{\frac{b-1}{N-ab}F(b-1,\ N-ab\ ;\ 0.05)}^{\infty} h(q\ ;\ b-1+2p,\ N-ab)\,dq$$

f_k の値の計算には $B^* = n O_\beta' \mathcal{M} O_\beta$ を使う。その結果は (8) 式で $i \rightleftarrows j$，$a \rightleftarrows b$ の入れ替えをしたものに等しい。

βの検定の場合は $\sum_{i} n_{ij}^{-1}$ が j によらない定数の時正確なものとなる。つぎに数値例を示す。

取り上げるデザインは次のものである。

D1	2	2	2	D2	1	1	1	D3	1	1	4	D4	1	2	2
	2	2	2		2	2	2		1	4	1		2	3	2
	2	2	2		3	3	3		4	1	1		1	2	3

D5	1	1	1	1	1	D6	1	1	2	2	3
	2	2	2	2	2		2	2	3	3	1
	3	3	3	3	3		3	3	1	1	2

D7	1	2	2	2	2
	2	2	2	2	1
	2	2	1	2	2

D1 に関しては勿論正確な検定になっている。

また，次頁の表から n_{ij} のばらつきによって f_{ik} は余り大きな値を取らず，確率 P は余り公称値からずれないことがわかる。f_{ik} の中では f_2 の影響が殆どで有り，$|f_2|$ が 0.1 位の時にはずれは 0.2 % 位，0.2 位の時はずれが 0.4 % 位であることがわかる。

以上は二元配置の検定をしてきたが，一般の k 元配置でも類似の議論が成立する。ある r 次の交互作用の検定については $n_{ijkl\cdots}^{-1}$ を関係のない

R－r 図の添字について平均したもののばらつきのみが影響することも自明である。

第一種の過誤の確率の表

D2	α	β	$\alpha\beta$	D3 α	β	$\alpha\beta$	D4 α	β	$\alpha\beta$
f_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f_2	−0.1074	0	−0.2147	0	0	−0.1358	−0.0135	−0.0510	−0.1924
f_3	—	—	0.0000 (10^{-7})	—	—	−0.0041	—	—	0.0350
f_4	—	—	0.0115	—	—	0.0027	—	—	−0.0009
P_0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
P_1	0.1981	0	0.3920	0	0	0.2550	0.0249	0.0940	0.3040
P_2	0.0033	0	0.0145	0	0	0.0055	10^{-5}	0.0007	0.0119
P_3	−0.0002	0		0	0		10^{-7}	10^{-7}	
P	5.2012	5.0	5.4065	5.0	5.0	5.2605	5.0249	5.0947	5.3159

D5	α	β	$\alpha\beta$	D6 α	β	$\alpha\beta$	D7 α	β
f_1	0	0	f_1 0 f_2 −0.4298	0	0	f_1 0 f_2 −0.3438	0	0
f_2	−0.1074	0	f_3 -10^{-7} f_4 0.0693	−0.0043	0	f_3 −0.0068 f_4 0.0436	−0.0064	−0.0278
f_3	—	0	f_5 10^{-7} f_6 −0.0050	—	0	f_5 0.0016 f_6 −0.0024	—	−0.0007
f_4	—	0	f_7 10^{-9} f_8 0.0001	—	0	f_7 −0.0001 f_8 10^{-5}	—	0.0001
P_0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
P_1	0.2654	0	0.3197	0.0011	0	0.2558	0.0015	0.0038
P_2	0.0044	0	−0.0095	10^{-6}	0	−0.0062	10^{-5}	10^{-5}
P_3	−0.0005	0	0.0015	10^{-7}	0	0.0008	10^{-7}	10^{-6}
P	5.2693	5.0	5.3117	5.0011	5.0	5.2504	5.0015	5.0038

§3. 母数模型の場合の近似検定 ── 対立仮説の下での分布

今節では，検定統計量の対立仮説での分布を導びき，パラメータがどの様な入り方になっているかを考察する。

まず，

$$\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)'$$

が $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ （多次元正規分布）に従っているとする。この際，

$$\mathbf{x}' A \mathbf{x} \qquad (A：\text{実対称行列})$$

の分布を考える。

$\mathbf{x}' A \mathbf{x}$ の特性函数 $\psi(t)$ は次の様である。

$$\psi(t) = E\left(\exp(it\, \mathbf{x}' A \mathbf{x}) \right)$$

$$= \left| I - 2it A \Sigma \right|^{-\frac{1}{2}} \exp \frac{1}{2} \left\{ \boldsymbol{\mu}' (I - 2it \Sigma A)^{-1} \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} \right\}$$

この結果を（4）式の $W_{\alpha\beta}$ の分子の統計量に適用する。

$$w_{\alpha\beta} = \frac{(a-1)(b-1)\, S_{\alpha\beta}}{tr\{ V(\mathbf{Z}) \cdot G_{\alpha\beta} \}} = \frac{(O'_{\alpha\beta} \mathbf{Z})' (O_{\alpha\beta} \mathbf{Z})}{n^{-1} \sigma_e^2}$$

であり， $O'_{\alpha\beta} \mathbf{Z}$ は $N(O'_{\alpha\beta} \boldsymbol{\mu}_{\alpha\beta},\ O'_{\alpha\beta} V(\mathbf{Z}) O_{\alpha\beta})$ に従うから

$w_{\alpha\beta}$ の特性函数は

$$\psi(t) = \left| I_{(a-1)(b-1)} - 2it \frac{1}{n^{-1}\sigma_e^2} O'_{\alpha\beta} V(\mathbf{Z}) O_{\alpha\beta} \right|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times \exp \frac{1}{2} \left\{ (O'_{\alpha\beta} \boldsymbol{\mu}_{\alpha\beta})' \left(I - 2it \frac{1}{n^{-1}\sigma_e^2} O'_{\alpha\beta} V(\mathbf{Z}) O_{\alpha\beta} \right)^{-1} (O'_{\alpha\beta} V(\mathbf{Z}) O_{\alpha\beta})^{-1} \times O'_{\alpha\beta} \boldsymbol{\mu}_{\alpha\beta} - (O'_{\alpha\beta} \boldsymbol{\mu}_{\alpha\beta})' (O'_{\alpha\beta} V(\mathbf{Z}) O_{\alpha\beta})^{-1} O'_{\alpha\beta} \boldsymbol{\mu}_{\alpha\beta} \right\}$$

となり，若干の計算の後に，

$$\psi(t) = \left| I - 2it \frac{1}{n^{-1}\sigma_e^2} O_{\alpha\beta} V(Z) O_{\alpha\beta} \right|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times \exp \frac{1}{2} (O'_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta})' \frac{2it}{n^{-1}\sigma_e^2} \left(I - \frac{2it}{n^{-1}\sigma_e^2} O'_{\alpha\beta} V(Z) O_{\alpha\beta}\right)^{-1} O'_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}$$

を得る。

ここで，（5）式の様に $V(Z)$ を V_0 と V_1 にわけると $\psi(t)$ は次の様に書ける。

$$\psi(t) = \left| (1-2it) I_{(a-1)(b-1)} - 2it \cdot n\, O'_{\alpha\beta}\, \mathcal{R}\, O_{\alpha\beta} \right|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times \exp\left\{ \frac{n}{\sigma_e^2} \cdot \frac{it}{1-2it} (O'_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta})' \left(I - \frac{2it}{1-2it} n O'_{\alpha\beta}\, \mathcal{R}\, O_{\alpha\beta}\right)^{-1} O'_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} \right\}$$

ただし，$\mathcal{R}$ は（7）式の $\mathcal{R}$ であり，

$$O'_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} = O'_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} (\alpha\beta)_{11} \\ \vdots \\ (\alpha\beta)_{1b} \\ \vdots \\ (\alpha\beta)_{a1} \\ \vdots \\ (\alpha\beta)_{ab} \end{bmatrix}$$

は，$(\alpha\beta)_{ij}$ に関する $(a-1)(b-1)$ 個の直交対比をあらわしている。

$\psi(t)$ の式中の exponential の中の逆行列を展開すると第一項が

$$\frac{it}{1-2it} \cdot \frac{(O'_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta})' (O'_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta})}{n^{-1} \sigma_e^2}$$

になっていることがわかる。従って

$$\left| \frac{2it}{1-2it} \right| \left\| n\, O'_{\alpha\beta}\, \mathcal{R}\, O_{\alpha\beta} \right\|$$

が十分小さければ，まともな検定になっていることが期待される。

§二．の (ii) および (iii) で論じた α および β に関する場合も $0_{\alpha\beta}$ を 0_α および 0_β に改めるだけで類似の議論が成立する。

この数値例については検討中であり，追って報告したい。

引用文献

[1] Hirotsu, C. (1966) : " Estimating variance components in a two-way layout with unequal numbers of observations" , Rep. Stat. Appl. Res., JUSE , Vol. 13 , No. 2 , PP. 29 − 34 .

[2] Plackett, R.L. (1960) : Regression Analysis, Oxford at the Clarendon Press.